引文格式:李保金,薛树强,肖圳,等.附加先验声速结构约束的GNSS-A观测反演声速剖面[J].武汉大学学报(信息科学版),2026,51(3):618-628.DOI:10.13203/j.whugis20240005

Citation:LI Baojin,XUE Shuqiang,XIAO Zhen,et al.Inversion of Sound Speed Profile Using GNSS-A Observations with Prior Sound Speed Structure Constraint[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2026,51(3):618-628.DOI:10.13203/j.whugis20240005

附加先验声速结构约束的GNSS-A观测反演声速剖面

李保金[1,2] 薛树强[1,2] 肖 圳[1,2] 朱冀星[1,2]

1 空间基准全国重点实验室,北京,100830

2 中国测绘科学研究院,北京,100830

摘 要:实施现场声速剖面(sound speed profile,SSP)测量不仅会增加海底大地测量观测的成本,也会制约各类海底大地测量监测的时效性,而基于观测信息反演SSP是替代现场SSP测量的有效途径。利用日本公开的全球导航卫星系统-声学(global navigation satellite system-acoustic,GNSS-A)观测数据集,比较分析了不同约束方案对Munk模型、双线性模型和自构经验模型反演SSP精度及实施海底大地测量定位精度的影响。结果表明,反演SSP若要实现高精度定位,必须在定位模型中考虑声速时空变化的影响。海面适当约束且海底梯度松约束条件下的自构经验模型通常具有相对更高的反演SSP精度与定位精度,与现场实测SSP互差的均方根(root mean square,RMS)在[10,1 000)m的浅海约5 m/s,在[1 000,1 727.8]m的深海约1 m/s,在东、北和天方向分别为0.002 m、0.002 m和0.022 m。建议采用海面适当约束且海底梯度松约束条件下的自构经验模型及两级优化方法实现替代现场SSP测量的海底大地测量定位。

关键词:海底大地测量;GNSS-A;SSP函数;反演;精密定位

中图分类号:P229 **文献标识码**:A **收稿日期**:2024-06-19

DOI:10.13203/j.whugis20240005 **文章编号**:1671-8860(2026)03-0618-11

Inversion of Sound Speed Profile Using GNSS-A Observations with Prior Sound Speed Structure Constraint

LI Baojin[1,2] *XUE Shuqiang*[1,2] *XIAO Zhen*[1,2] *ZHU Jixing*[1,2]

1 State Key Laboratory of Spatial Datum, Beijing 100830, China

2 Chinese Academy of Surveying and Mapping, Beijing 100830, China

Abstract: **Objectives**: The global navigation satellite system-acoustic (GNSS-A) ranging combined technology extends the geodetic observation network to the ocean, becoming an important technical means for monitoring submarine geophysical phenomena. Currently, high-precision seafloor geodetic positioning typically relies on a reference sound speed profile (SSP), combined with acoustic ray-tracing methods to correct refraction errors, and direct inversion or parameterized compensation to mitigate the effects of spatio-temporal variations of sound speed. However, in-field SSP measurements not only increases the cost of seafloor geodetic observations, but also limits the timeliness of various seafloor geodetic monitoring efforts. Inverting the SSP based on GNSS-A observation data is an effective approach to replace in-field SSP measurements. **Methods**: Based on the long-term GNSS-A observation data from the MYGI station publicly released by Japan, we systematically compare the performance of the Munk model, bilinear model, and self-constructed empirical model in inverting SSP under different constraint conditions. The positioning so-

基金项目:国家自然科学基金(41931076,42474014,42304040);崂山实验室"问海计划"科技项目(LSKJ202205100,LSKJ202205105);中国测绘科学研究院基本科研业务费(AR2313);空间基准全国重点实验室课题(SKLSD2025-ZZ-07,SKLSD2025-KF-16)。

第一作者:李保金,博士生,主要从事海底大地测量定位研究。libaojin1998@163.com

通信作者:薛树强,博士,研究员。xuesq@casm.ac.cn

lutions are then calculated using the ray-tracing model *M*1, which considers only the vertical variation of sound speed, and the sonar zenith delay model *M*2, which further incorporates parameters to compensate for the spatiotemporal variations of sound speed, based on the inverted SSP. Finally, using the in-field SSP and its corresponding positioning results as references, a comprehensive evaluation is conducted to assess the impact of different SSP models and constraint schemes on the accuracy of seafloor geodetic positioning. **Results:** The experimental results show that inverted SSP can effectively represent the overall variation trend of SSP, with more accurate characterization in deeper layers and relatively poorer characterization in shallower layers. The self-constructed empirical model under appropriate sea surface constraints and relaxed seafloor gradient constraints generally exhibits relatively higher inversion accuracy, with the root mean square (RMS) of differences compared to in-field measured SSP being approximately 5 m/s in shallow waters (in the depth range of 10-1 000 m) and about 1 m/s in deep waters (in the depth range of 1 000-1 727.8 m). When the positioning model only considers the vertical variation of sound speed, the self-constructed empirical model under different constraint conditions achieves the highest or comparable positioning accuracy compared to other SSP models, but high-precision positioning cannot yet be achieved. When the positioning model further accounts for the spatiotemporal variation of sound speed, the three-dimensional positioning accuracy is significantly improved. Except for the bilinear model under tight seafloor gradient constraints, the three SSP models under the remaining constraints achieve high-precision positioning. The self-constructed empirical model under appropriate sea surface constraints and relaxed seafloor gradient constraints achieves the relatively highest positioning accuracy, with RMS of differences compared to in-field SSP positioning results of 0.002 m, 0.002 m, and 0.022 m in the east, north, and up directions, respectively. **Conclusions:** Experimental results demonstrate that, to achieve high-precision positioning with inverted SSP, the influence of spatiotemporal variation of sound speed must be considered in the positioning model. It is recommended to adopt the self-constructed empirical model under appropriate sea surface constraints and relaxed seafloor gradient constraints, along with a two-level optimization method, to achieve seafloor geodetic positioning as an alternative to in-field SSP measurements. It should be noted that the proposed method still has certain limitations. On the one hand, the difficulty in obtaining prior information under special conditions, such as in shallow seas or polar regions, constrains inversion accuracy. On the other hand, the current algorithm relies on relatively accurate historical SSP initial values to ensure iterative convergence. Future research should explore how to integrate multi-source ocean data to establish a more robust prior constraint system.

Key words: seafloor geodesy; GNSS-A; SSP function; inversion; precise positioning

全球导航卫星系统-声学(global navigation satellite system-acoustic, GNSS-A)组合技术将大地测量观测网络扩展到海洋,已成为监测海底地球物理现象的重要技术手段[1-3]。受海洋环境连续动态变化的影响,水下声学信号在传播过程中会发生显著折射[4-8]。为修正由此引起的定位误差,需要采用声线跟踪技术并结合高时空分辨率的现场声速测量[9-10]。但受限于现实条件,实际中通常仅测量一条参考声速剖面(reference sound speed profile, RSSP)。随着海底精密定位理论的发展,目前已能通过直接反演声速时空变化或间接补偿其影响,实现基于RSSP的高精度海底大地测量定位[11-12]。

尽管如此,现场声速剖面(sound speed profile, SSP)的高效获取仍是当前实际应用的重要制约因素。一方面,传统走航式GNSS-A观测在测量SSP时往往需要耗费大量船时,导致观测成本显著增加[13];另一方面,无人机、无人船、海面浮标等无人观测系统发展迅速,但受系统载荷等限制,难以测量全水深SSP[1,14-15]。因此,现场SSP测量已成为制约低成本连续海底基准观测维护和各类实时监测应用的瓶颈。

SSP是实现高精度海底大地测量的必要条件[16],但现场SSP测量费时费力,并且不同经验公式计算的声速存在不确定性。为减少对现场SSP的依赖,文献[17]提出线性和双线性SSP模型,并通过最优化方法反演SSP模型参数,实现了无需现场SSP的海底大地测量定位。文献[18]通过附加先验约束反演Munk SSP模型参数[19],实现了

无现场SSP情况下的水下航行器位置增强服务。理论上任意的SSP函数均可用于反演,进而替代现场SSP。文献[20]提出基于自构经验SSP模型的两级优化方法。该方法首先通过SSP参数与海底站坐标联合估计反演RSSP,然后通过在定位模型中附加参数,补偿声速时空变化对定位的影响,从而替代现场SSP并实现高精度定位。然而,该研究并未对附加约束的SSP反演方法进行系统的讨论。

为此,本文首先统一地给出了附加先验约束的SSP参数与海底站坐标联合估计模型;然后,基于日本公开的长期GNSS-A观测数据,比较分析了采用两级优化方法时,不同约束条件下Munk模型、双线性模型和自构经验模型对海底大地测量定位的影响;最后,给出了结论及建议。

1 基于RSSP的GNSS-A海底大地测量定位

复杂的声速时空变化是GNSS-A定位精度面临的最棘手问题。针对该问题,高精度海底大地测量通常需要测量RSSP并补偿声速时空变化对定位的影响。为此,文献[20]提出如下声呐天顶延迟定位模型:

$$T_{\mathrm{obs}}=\sum_{J}\int_{u_X}^{u_x^J}(\cos\beta(u))^{-1}c_0^{-1}(u)\mathrm{d}u-m_tZ_t(t)-m_nZ_n(t)-m_eZ_e(t)-m_{n'}Z_{n'}(t)-m_{e'}Z_{e'}(t)+\varepsilon_T \tag{1}$$

式中,T_{obs}为声信号传播时间观测值;$J\in\{s,r\}$表示声信号传播状态,s表示发射,r表示接收;u_x^J为海面换能器深度;u_X为海底应答器深度;$\beta(u)$为特征声线反演计算的随深度u变化的声线入射角;$c_0(u)$为RSSP;t为观测时刻;$Z_t(t)$为声速时间变化引起的天顶延迟;$Z_n(t)$、$Z_e(t)$、$Z_{n'}(t)$、$Z_{e'}(t)$分别为声速水平梯度引起的天顶延迟;$m_t=(\cos z)^{-1}$、$m_e=(\cos z)^{-1}\tan z\sin\alpha$、$m_n=(\cos z)^{-1}\tan z\cos\alpha$、$m_{e'}=(\cos z)^{-1}\tan z'\sin\alpha'$、$m_{n'}=(\cos z)^{-1}\tan z'\cos\alpha'$分别为相应的声呐天顶延迟映射函数,其中$z$和$\alpha$分别为在海底大地测量站观测海面船的天顶角和方位角,z'和α'分别为在海底大地测量阵列中心处观测海面船的天顶角和方位角;ε_T为观测噪声。

现场测量RSSP费时费力,成本高昂,因此,构建图1所示的经验SSP函数,并利用GNSS-A观测反演SSP,成为替代现场SSP的可能途径。

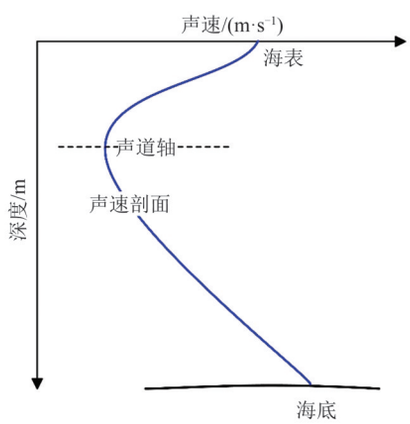


图1 SSP结构示意图

Fig. 1 Structure Diagram of SSP

常见的经验SSP模型有Munk模型、双线性模型和自构经验模型等。Munk模型的计算式为:

$$c(u,\zeta,v_a,B,z_a)=v_a(1+\zeta(\mathrm{e}^{-\eta}+\eta-1)) \tag{2}$$

式中,c为声速;u为深度;ζ为扰动系数;v_a为声道轴声速;B为归一化系数;z_a为声道轴深度;$\eta=2(u-z_a)/B$为无量纲距离。

双线性模型的计算式为:

$$c(u,v_s,g_1,g_2,u_b)=\begin{cases}v_s+g_1u,0\leqslant u\leqslant u_b\\ v_b+g_2(u-u_b),u>u_b\end{cases} \tag{3}$$

式中,v_s为海面声速;g_1和g_2为双线性函数的分段梯度;u_b为双线性连接点深度;v_b为u_b深度处的声速。

自构经验模型的计算式为:

$$\begin{cases}c(u,T_c)=f(T_c,S,P)\\ T_c(u,T_m,\Delta T,u_0)=T_m+\Delta T\mathrm{e}^{-\frac{u}{u_0}}\end{cases} \tag{4}$$

式中,T_c为经验温度剖面;$f()$为经验声速公式;S为盐度;P为压强;T_m为先验海底水温;ΔT为海面与海底温度差;u_0为温跃层的深度。

Munk模型通过z_a和v_a控制SSP在声道轴处的特征,通过ζ和B控制SSP弯曲,实现对SSP的几何近似。双线性模型通过v_s、g_1、g_2和u_b表征海面声速、浅层声速垂向梯度、深层声速垂向梯度和声道轴深度,近似SSP时极具灵活性。相比于前两者直接近似SSP,自构经验模型分别对影响SSP的温度剖面、盐度剖面和压力剖面建模,然后基于经验声速公式计算SSP。其中,温度是SSP变化的主要影响因素,其剖面通常近似呈指数变化。根据温度变化规律,可构建指数型经验温度剖面函数,并通过T_m与ΔT控制温度剖面的特征点,由u_0控制其弯曲程度。压力剖面主要受深度影响,可采用Leroy压力模型实现深度向压力的转换[21]。SSP的深海梯度主要由压力引起,这使得自构经验模型天然携带着深海梯度信息。

需要注意的是,盐度变化较为复杂,建立其经验模型需要更多的控制参数。盐度参与反演一方面可能会与温度剖面参数耦合导致反演不准确,另一方面可能会导致解空间过于复杂而难以有效收敛。盐度每增加1‰,声速增加约1.14 m/s,考虑到盐度对声速的影响小且时空变化平缓,建议在自构经验模型中直接将盐度设为经验常值35‰[22]。此外,建议采用Del Grosso模型实现温盐到声速的转换[23],计算式为:

$$\begin{cases} c(S,T,P)=C_0+V_T+V_S+V_P+V_{STP} \\ V_T=C_1T+C_2T^2+C_3T^3 \\ V_S=C_4S+C_5S^2 \\ V_P=C_6P+C_7P^2+C_8P^3 \\ V_{STP}=C_9TP+C_{10}T^3P+C_{11}TP^2+ \\ C_{12}T^2P^2+C_{13}TP^3+C_{14}ST+C_{15}ST^2+ \\ C_{16}STP+C_{17}S^2TP+C_{18}S^2P^2 \end{cases} \tag{5}$$

式中,T为温度;V_T、V_S、V_P分别为仅由温度、盐度和压力影响的声速变化;V_{STP}为由温度、盐度和压力混合影响的声速变化。模型系数具体见表1[23]。

表1　Del Grosso模型系数

Table 1　Coefficient of Del Grosso Model

系数	数值	系数	数值
C_0	$1.402\,392\times10^{3}$	C_{10}	$-4.383\,615\times10^{-7}$
C_1	5.012 285	C_{11}	$-1.593\,895\times10^{-6}$
C_2	$-5.511\,840\times10^{-2}$	C_{12}	$2.656\,174\times10^{-8}$
C_3	$2.216\,490\times10^{-4}$	C_{13}	$5.222\,483\times10^{-10}$
C_4	1.329 530	C_{14}	$-1.275\,936\times10^{-2}$
C_5	$1.288\,598\times10^{-4}$	C_{15}	$9.688\,441\times10^{-5}$
C_6	$1.560\,592\times10^{-1}$	C_{16}	$-3.406\,824\times10^{-4}$
C_7	$2.449\,993\times10^{-5}$	C_{17}	$4.857\,614\times10^{-6}$
C_8	$-8.833\,959\times10^{-9}$	C_{18}	$-1.616\,745\times10^{-9}$
C_9	$6.353\,509\times10^{-3}$		

2　SSP反演方法

2.1　附加先验约束的反演模型

将SSP函数表示为深度u与控制参数$\boldsymbol{p}$的函数$c(u,\boldsymbol{p})$,基于GNSS-A观测可实现坐标参数与SSP参数的联合估计。但等效SSP会导致SSP反演存在多解性问题,为稳定迭代并获得有意义的解,需要引入先验声速结构约束。此时,附加先验声速结构约束的GNSS-A观测反演SSP模型可表示为:

$$\begin{cases} T_{\text{obs}}=T(\boldsymbol{X},c_0(u,\boldsymbol{p}))+\boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p})+\boldsymbol{V}_\tau \end{cases} \tag{6}$$

式中,T_{obs}为往返传播时间观测值向量;$T()$为2D声线跟踪计算的双程传播时间向量;$\boldsymbol{X}$为海底站坐标向量;$\boldsymbol{V}$为观测残差向量;$\boldsymbol{\tau}$为先验约束值向量;$\boldsymbol{r}()$为约束关系向量;$\boldsymbol{V}_\tau$为先验约束值残差向量。其中,T的计算式为:

$$T=\sum_j\int_{u_X}^{u_Z^j}\left[\cos\beta(u)\right]^{-1}c_0^{-1}(u)\mathrm{d}u \tag{7}$$

估计海底站坐标$\boldsymbol{X}$与SSP参数$\boldsymbol{p}$的最小二乘准则可表示为:

$$\min_{\boldsymbol{p}} g(\boldsymbol{X},\boldsymbol{p})=\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{p})\boldsymbol{D}_L^{-1}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{p})+\boldsymbol{V}_\tau^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{D}_\tau^{-1}\boldsymbol{V}_\tau(\boldsymbol{p}) \tag{8}$$

式中,g为加权残差平方和;$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{p})=T_{\text{obs}}-T(\boldsymbol{X},c_0(u,\boldsymbol{p}))$为观测残差向量;$\boldsymbol{D}_L$为观测值方差向量,这里采用IGGⅢ抗差的权为1的等权矩阵简化讨论;$\boldsymbol{V}_\tau(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p})$为先验约束值残差向量;$\boldsymbol{D}_\tau$为先验约束值方差。

为获取最小二乘解,$g(\boldsymbol{X},\boldsymbol{p})$的一阶偏导$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{p})$计算式为:

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g(\boldsymbol{X},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{X}} \\ \dfrac{\partial g(\boldsymbol{X},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{D}_L^{-1}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{p}) \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{D}_L^{-1}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{p})+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{D}_\tau^{-1}\boldsymbol{V}_\tau(\boldsymbol{p})\end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{\partial T(\boldsymbol{X},c_0(u,\boldsymbol{p}))}{\partial \boldsymbol{X}}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{J\in\{s,r\}}\dfrac{\partial T_{J,1}}{\partial \boldsymbol{X}} \\ \sum\limits_{J\in\{s,r\}}\dfrac{\partial T_{J,2}}{\partial \boldsymbol{X}} \\ \vdots \\ \sum\limits_{J\in\{s,r\}}\dfrac{\partial T_{J,n}}{\partial \boldsymbol{X}}\end{pmatrix}=c^{-1}\begin{pmatrix}\sum\limits_{J\in\{s,r\}}\left(\sin\alpha_{J,1}\sin\beta_{J,1}\quad\cos\alpha_{J,1}\sin\beta_{J,1}\quad\cos\beta_{J,1}\right) \\ \sum\limits_{J\in\{s,r\}}\left(\sin\alpha_{J,2}\sin\beta_{J,2}\quad\cos\alpha_{J,1}\sin\beta_{J,2}\quad\cos\beta_{J,2}\right) \\ \vdots \\ \sum\limits_{J\in\{s,r\}}\left(\sin\alpha_{J,n}\sin\beta_{J,n}\quad\cos\alpha_{J,n}\sin\beta_{J,n}\quad\cos\beta_{J,n}\right)\end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{\partial T(\boldsymbol{X},c_0(u,\boldsymbol{p}))}{\partial \boldsymbol{p}},\boldsymbol{C}=\frac{\partial \boldsymbol{r}(\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}} \tag{11}$$

式中,$\boldsymbol{A}$是关于坐标向量的雅可比矩阵;c是加权平均声速;$T_{J,n}$为声线跟踪计算的第n条声线的双程传播时间;$\alpha_{J,n}$、$\beta_{J,n}$分别为第n条声线的方位角和入射角;$\boldsymbol{B}$是往返传播时间$T(\boldsymbol{X},c_0(u,\boldsymbol{p}))$关于$\boldsymbol{p}$

的一阶偏导,因数学关系较为复杂,需要借助数值进行求导;$\boldsymbol{C}$是约束函数$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p})$关于$\boldsymbol{p}$的一阶偏导。

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{k+1}\\ \boldsymbol{p}_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{k}\\ \boldsymbol{p}_{k}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_L^{-1}\boldsymbol{A}_k & \boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_L^{-1}\boldsymbol{B}_k\\ \boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_L^{-1}\boldsymbol{A}_k & \boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_L^{-1}\boldsymbol{B}_k+\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_\tau^{-1}\boldsymbol{C}_k\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_L^{-1}\boldsymbol{V}_k\\ \boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_L^{-1}\boldsymbol{V}_k+\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_\tau^{-1}\boldsymbol{V}_{\tau,k}\end{pmatrix} \tag{12}$$

式中,k是迭代索引;$\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_k)$;$\boldsymbol{B}_k=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{p}_k)$;$\boldsymbol{C}_k=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}_k)$;$\boldsymbol{V}_k=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}_k,\boldsymbol{p}_k)$;$\boldsymbol{V}_{\tau,k}=\boldsymbol{V}_\tau(\boldsymbol{p}_k)$。截止条件建议采用$\max\limits_{i=1,2,\cdots,S}(\|\boldsymbol{X}_{i,k+1}-\boldsymbol{X}_{i,k}\|)<\delta$,其中,$\delta$是一个足够小的正值,本文设置$\delta=5\times10^{-3}$;$i$是$S$个海底测站的索引。为控制迭代时间,同时将最大迭代次数设为截止条件,本文设为20次。式(12)即为统一的附加先验声速结构约束的GNSS-A观测反演SSP模型。

2.2 约束函数构建

深海高压、无光环境使得温度和声速极为稳定,基于历史观测可以获取准确的先验约束信息。同时,深海中温度与声速垂向梯度也极为稳定,这一特性有助于提升SSP反演的准确性。与之相比,浅海反演的精度往往受限于SSP函数的表征能力和等效SSP的影响,较难控制。为此,建议根据现实条件在海面附加适当约束。本文主要通过对海底声速或温度、海底声速梯度或温度梯度以及海面声速或温度附加一定约束来优化反演效果。下面进一步说明所附加的约束函数$\tau=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p})$的具体形式。

1)直接对具有物理意义的SSP参数$\boldsymbol{p}$附加约束$\boldsymbol{p}_0$时,约束函数可表示为:

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0 \tag{13}$$

线性化后可表示为:

$$\boldsymbol{I}\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0-\boldsymbol{p} \tag{14}$$

式中,$\boldsymbol{I}$为单位矩阵。

2)在深度u_r附加声速为v_r的约束时,约束函数可表示为:

$$c(u_r,\boldsymbol{p})=v_r \tag{15}$$

线性化后可表示为:

$$\frac{\partial c(u,\boldsymbol{p})}{\partial\boldsymbol{p}}\Big|_{(u_r,\boldsymbol{p}_0)}\mathrm{d}\boldsymbol{p}=c_r-c(u,\boldsymbol{p})|_{(u_r,\boldsymbol{p}_0)} \tag{16}$$

对自构经验模型中的温度经验模型附加温度约束与式(16)形式相同。

3)在深度u_r附加梯度为k_r的约束时,约束函数可表示为:

$$\frac{\partial c(u,\boldsymbol{p})}{\partial u}\Big|_{u_r}=k_r \tag{17}$$

线性化后可表示为:

$$\frac{\partial^2 c(u,\boldsymbol{p})}{\partial u\partial\boldsymbol{p}}\Big|_{(u_r,\boldsymbol{p}_0)}\mathrm{d}\boldsymbol{p}=k_r-\frac{\partial c(u,\boldsymbol{p})}{\partial u}\Big|_{(u_r,\boldsymbol{p}_0)} \tag{18}$$

令$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{p})=0$,直接给出附加约束的高斯-牛顿迭代求解公式:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{k+1}\\ \boldsymbol{p}_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{k}\\ \boldsymbol{p}_{k}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_L^{-1}\boldsymbol{A}_k & \boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_L^{-1}\boldsymbol{B}_k\\ \boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_L^{-1}\boldsymbol{A}_k & \boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_L^{-1}\boldsymbol{B}_k+\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_\tau^{-1}\boldsymbol{C}_k\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_L^{-1}\boldsymbol{V}_k\\ \boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_L^{-1}\boldsymbol{V}_k+\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_\tau^{-1}\boldsymbol{V}_{\tau,k}\end{pmatrix} \tag{12}$$

对自构经验模型中的温度经验模型附加温度梯度约束与式(18)形式相同。

3 算例分析

3.1 实验数据与流程

为了分析不同约束条件对反演SSP及海底大地测量定位的影响,本文采用了日本海底大地测量阵列中MYGI测站的长期GNSS-A观测数据。MYGI测站的坐标为(142.92°E,38.08°N),相关数据可通过公开网页获取(https://www1.kaiho.mlit.go.jp/chikaku/kaitei/sgs/datalist_e.html)。

本文算例分析的具体流程如图2所示。首先,在不同约束条件下,分别基于Munk模型、双线性模型和自构经验模型,采用高斯-牛顿迭代法对SSP参数与海底站坐标进行联合估计,得到的海底站坐标记为$M1$定位模型解,所采用的定位模型为仅考虑声速垂向变化的声线跟踪定位模型。然后,基于反演得到的SSP,采用声呐天顶延迟定位模型进行求解,相应的海底站坐标记为$M2$定位模型解,其定位模型在声线跟踪定位模型基础上进一步附加了声速时空变化影响补偿参数。最后,以现场SSP及其对应的$M1$、$M2$定位模型解为参考值,比较不同约束下各SSP函数的反演精度及定位精度。

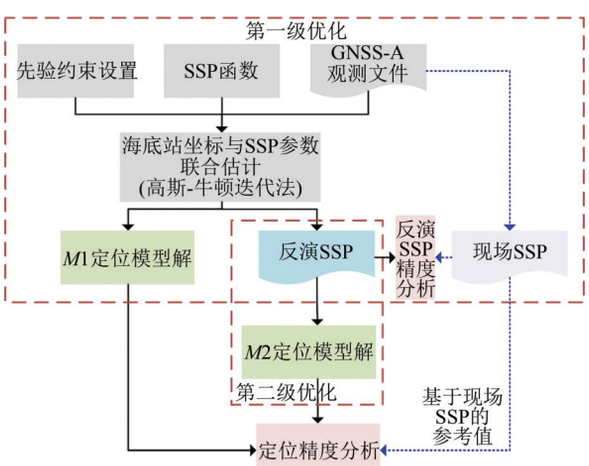


图2 算例分析流程

Fig. 2 Analysis Workflow of Numerical Example

在对某一深度范围内的反演SSP精度进行分析时,本文以现场SSP作为参考值,首先计算反演SSP与现场SSP的互差,然后将其排列为

一维数组,进而统计其均值与均方根(root mean square, RMS)。在评估反演SSP对定位精度的影响时,则以基于现场SSP的定位解作为参考值,计算在相同定位模型下反演SSP与现场SSP定位结果的互差,并统计其均值、RMS值和极值。

3.2　先验约束设置

SSP反演的多解性问题可通过对其参数附加约束进行改善。为此,首先需了解SSP的时空变化特征。图3展示了MYGI站周边约10年的Argo观测SSP,空间覆盖范围为(142.92°E±1.5°E, 38.08°N±1.5°N)。由图3可知,表层海水受海浪、洋流、内波及太阳辐射等因素影响,声速变化显著。随着深度的增加,这些因素的影响逐渐减弱,声速的时空变化趋于稳定,到1 500 m时已极为稳定。此外,声速稳定后,其垂向梯度也保持稳定。值得注意的是,由于温度是影响声速变化的主要因素,上述对海水声速的分析同样适用于海水温度的变化规律。

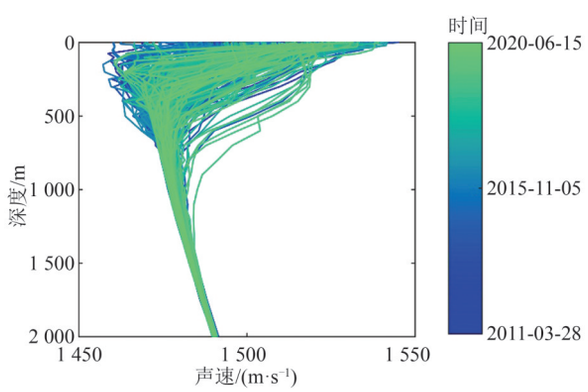


图3　MYGI站周边Argo观测SSP

Fig. 3　Observed SSP of Argo near MYGI Station

由于MYGI站35期现场测量SSP的最大深度均为1 727.8 m,本文选择在该深度处附加相关约束。1 727.8 m水深处Argo历史观测的海水温度、声速及其梯度的统计结果如表2所示。温度和声速的标准差分别为0.087 4 ℃和0.378 7 m/s,温度梯度与声速梯度的标准差分别为$1.924\ 9\times10^{-4}$ ℃/m和$8.014\ 6\times10^{-4}$ s^{-1},这定量地反映了深海物理量的高度稳定性。因此,对深海温度及其梯度或声速及其梯度附加严格约束,能够有效改善SSP反演中的多解性问题。此外,尽管海表声速变化剧烈,但已有研究表明,通过对双线性剖面附加相对宽松的海面声速约束,同样能改善反演的多解性问题,使其反演SSP的精度及定位精度均接近自构经验剖面[20]。

表2　1 727.8 m水深处Argo历史观测数据统计

Table 2　Statistics of Historical Argo Observational Data at the Depth of 1 727.8 m

参数	均值	标准差
温度/℃	2.148 6	0.087 4
温度梯度/(℃·m^{-1})	$-8.084\ 5\times10^{-4}$	$1.924\ 9\times10^{-4}$
声速/(m·s^{-1})	1 486.62	0.378 7
声速梯度/s^{-1}	0.013 6	$8.014\ 6\times10^{-4}$

本文在海底声速或温度约束的基础上进一步引入了海底梯度约束以及海面声速或温度约束。表3列出了3种SSP函数模型附加的基本约束信息。此外,为提高SSP反演程序的扩展性,本文对所有SSP函数参数均附加了方差为100^2的宽松约束。受等效SSP的影响,声道轴深度参数在反演中的敏感度较低,故结合图3所示的历史观测信息,将其约束值设为300 m,约束方差设为20^2。海面声速或温度变化较大,难以附加严格约束,因此沿用5^2的经验约束方差[20]。海底声速、温度及其梯度因稳定性高,可附加表3中所示的严格约束。

为分析引入海底声速或温度梯度约束和海面声速或温度约束对不同SSP模型反演及定位精度的影响,本文设计并对比了3种约束方案:

1)*C*1:海面声速或温度约束方差设为100^2,海底声速或温度梯度约束方差设为$0.000\ 01^2$,其余约束按表3设置。

2)*C*2:海面声速或温度约束方差设为5^2,海底声速或温度梯度约束方差设为100^2,其余约束按表3设置。

3)*C*3:海面声速或温度约束方差设为5^2,海底声速或温度梯度约束方差设为$0.000\ 01^2$,即约束完全按表3设置。

3.3　不同先验声速结构约束的GNSS-A观测反演SSP分析

3.3.1　反演SSP精度分析

考虑到换能器深度通常在水下5~10 m处,反演剖面实际对应海面换能器到海底应答器之间的水层,因此分析时剔除0~10 m的表层部分。

*C*3约束下的反演SSP结果如图4所示,结果表明,在先验信息约束下,反演SSP能够有效表征SSP的总体变化趋势。SSP底层由于先验信息准确且附加了严格约束,表征较为精确;SSP表层因受海浪、内波和太阳辐射等因素影响变化剧烈,难以附加严格约束,表征相对较差。其中,Munk模型对表层趋势的表征能力最差,可能是因为该模型弯曲控制参数对约束与反演不敏感。

表3 SSP模型约束信息

Table 3 Constraint Information for SSP Models

SSP函数模型	约束对象	约束值	约束方差
Munk模型	$[\zeta,v_a,B,z_a]$	[0.007 5,1 475,1 300,300]	$[100^2,100^2,100^2,20^2]$
	1 727.8 m声速	1 486.62	0.01^2
	0 m声速	1 500	5^2
	1 727.8 m声速梯度	0.013 6	$0.000\ 01^2$
双线性模型	$[v_s,g_1,g_2,u_b]$	[1 500,−0.1,0.013 6,300]	$[5^2,100^2,0.000\ 01^2,20^2]$
	1 727.8 m声速	1 486.62	0.01^2
自构经验模型	$[T_m,\Delta T,u_0]$	[2,10,300]	$[100^2,100^2,20^2]$
	1 727.8 m温度	1 486.62	0.01^2
	0 m温度	12	5^2
	1 727.8 m温度梯度	$8.014\ 6\times10^{-4}$	$0.000\ 01^2$

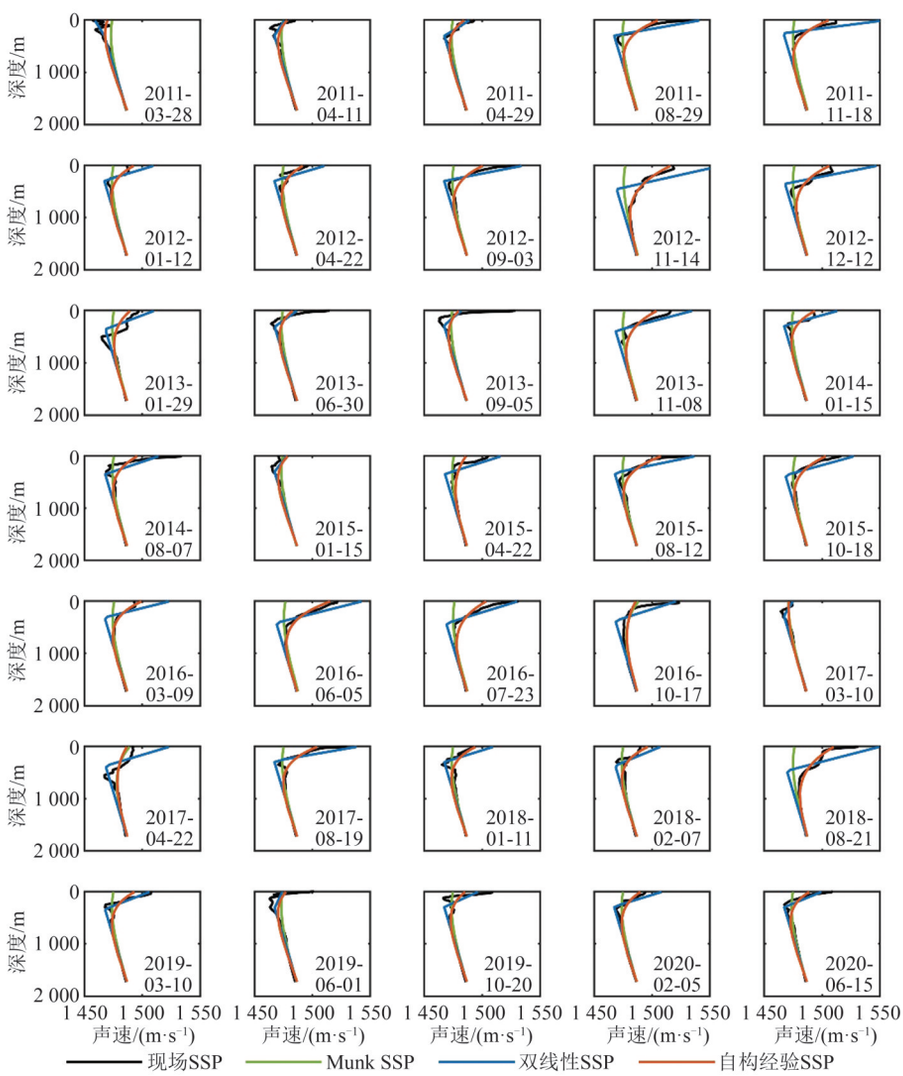


图4 现场SSP与反演SSP比较

Fig. 4 Comparison Between In-Field SSP and Inverted SSP

温跃层和深海等温层交界面约1 000 m,据此将SSP划分为[10,1 000) m的浅海和[1 000,1 727.8] m的深海[19],分别在3种约束方案下统计3种SSP模型的反演精度,结果如图5和图6所示。

3种约束相比,$C1$约束因对表层约束较为宽松且对底层梯度约束严格,浅层反演精度低而深层反演精度高;$C2$约束对底层梯度约束较为宽松,使得表层约束在反演过程中占据主导,因而浅层反演精度更高,但深层精度相应较低;$C3$约

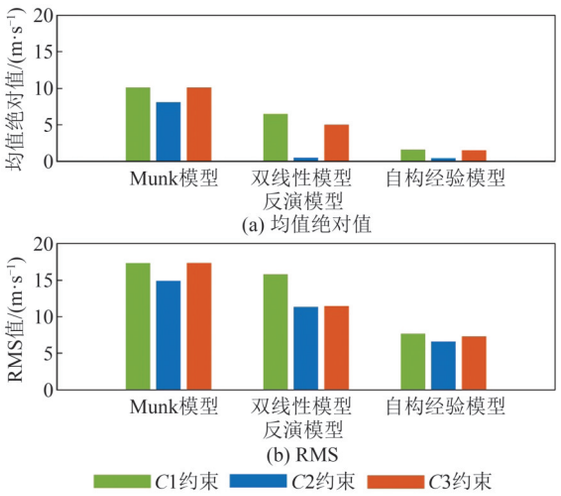


图5　[10,1 000) m水深范围内反演SSP误差的绝对偏差与RMS

Fig. 5　Absolute Deviation and RMS of SSP Inversion Errors in the Water Depth Range of [10,1 000) m

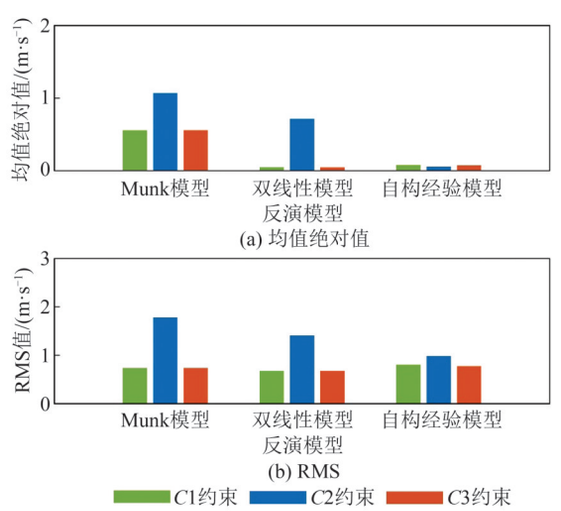


图6　[1 000,1 727.8] m水深范围内反演SSP误差的绝对偏差与RMS

Fig. 6　Absolute Deviation and RMS of SSP Inversion Errors in the Water Depth Range of [1 000,1 727.8] m

束在*C*2约束的基础上增强了底层梯度约束,反演时在两类约束间取得平衡,其浅层精度有所下降,而深层精度得到改善。3种SSP模型相比,浅海时,自构经验模型在不同约束下均表现最优,双线性模型表现次之,Munk模型表现最差。这是因为经验温度模型符合温度的变化规律,模型复杂度低且能较好地刻画浅层温度特征;双线性模型的参数均直接控制几何形态,相对Munk模型具有更强的近似能力。深海时,在*C*2约束下,自构经验模型因本身包含深海梯度信息而表现最优,双线性模型受初值和结构影响表现次之,Munk模型表现最差;而在*C*1和*C*3约束下,3种模型表现相当,这是因为SSP底部均附加了相同意义的严格约束。

3.3.2　海底定位精度分析

采用仅考虑声速垂向变化的*M*1定位模型解算,分别统计3种约束条件下反演SSP与实测SSP定位结果互差的均值、RMS和极值,以反映系统偏差、整体精度和极端情况,结果如表4所示。实验结果显示,*C*1和*C*3约束下定位互差统计结果接近,且与*C*2约束存在明显差异,这与不同约束下SSP反演精度的分布特点一致。具体来看,对于Munk模型,*C*2约束表现最优,表明其定位结果主要受浅层反演误差影响,此时东、北方向的均值、RMS和极值分别优于0.016 m、0.027 m和0.078 m,天方向均值、RMS和极值分别为0.204 m、0.400 m和1.141 m。对于双线性模型,同样*C*2约束表现最优,且与Munk模型结果接近。对于自构经验模型,*C*2约束相对最差,原因可能在于该约束使得联合反演过程在平衡SSP精度和定位精度时更偏向于前者;*C*1约束表现相对最优,该约束下东、北方向均值、RMS和极值分别优于0.008 m、0.020 m和0.053 m,天方向均值、RMS和极值分别为0.043 m、0.343 m和−0.728 m。实验结果表明,3种约束相比较,Munk模型与双线性模型在*C*2约束下定位精度最高,自构经验模型在*C*1约束下定位精度最高;3种模型相比较,自构经验模型在*C*1和*C*3约束下定位精度最高,在*C*2约束下与其余模型精度相当。不同约束下的3种SSP模型均不能实现高精度定位。

采用补偿声速时空变化影响的*M*2定位模型进行解算,统计3种约束条件下反演SSP与实测SSP定位结果互差的均值、RMS和极值,结果如表5所示。实验结果显示,相较于*M*1定位模型,*M*2定位模型因进一步补偿了声速时空变化误差影响,三维定位精度显著提升。不同约束下不同SSP模型在东、北方向的均值、RMS与极值分别不超过0.004 m、0.013 m和0.063 m。受观测系统设计影响,误差主要集中在天方向。Munk模型在天方向的均值、RMS和极值的绝对值范围分别为0.020～0.030 m、0.020～0.040 m和0.050～0.090 m,自构经验模型在天方向的均值、RMS和极值的绝对值范围分别为0～0.020 m、0.020～0.030 m和0.050～0.090 m。这两种SSP模型在3种约束下定位精度相当,是因为定位模型中附加的声速时空变化参数极大地补偿了反演SSP带来的误差。对于双线性模型,*C*2约束下定位精度最高,天方向定位误差的均值、RMS和极值分

表4 *M*1定位模型解的定位误差统计/m

Table 4 Statistics of Positioning Errors for the Solution of *M*1 Positioning Model/m

指标	模型	*C*1约束			*C*2约束			*C*3约束		
		东	北	天	东	北	天	东	北	天
均值	Munk	0.041	0.161	2.400	−0.002	0.016	0.204	0.041	0.161	2.406
	双线性	0.007	0.014	0.389	0.003	0.015	0.240	0.006	0.015	0.347
	自构经验	0.001	0.008	0.043	0.003	0.014	0.225	0.001	0.008	0.061
RMS	Munk	0.105	0.341	4.333	0.010	0.027	0.400	0.105	0.341	4.335
	双线性	0.014	0.026	0.556	0.011	0.026	0.410	0.013	0.026	0.506
	自构经验	0.010	0.020	0.343	0.010	0.026	0.418	0.010	0.020	0.365
极值	Munk	0.413	1.109	12.113	−0.030	0.078	1.141	0.415	1.114	12.165
	双线性	0.040	0.080	1.448	−0.030	0.077	1.130	0.041	0.082	1.169
	自构经验	−0.028	0.053	−0.728	0.028	0.075	1.147	0.030	0.056	0.996

表5 *M*2定位模型解的定位误差统计/m

Table 5 Statistics of Positioning Errors for the Solution of *M*2 Positioning Model/m

指标	模型	*C*1约束			*C*2约束			*C*3约束		
		东	北	天	东	北	天	东	北	天
均值	Munk	−0.001	0.000	−0.022	0.000	−0.001	−0.029	−0.001	0.000	−0.021
	双线性	0.002	0.004	0.089	0.000	−0.001	−0.003	0.001	0.003	0.059
	自构经验	0.000	0.000	−0.018	0.000	0.000	−0.007	0.000	0.000	−0.017
RMS	Munk	0.004	0.002	0.027	0.003	0.002	0.037	0.004	0.002	0.027
	双线性	0.011	0.013	0.147	0.002	0.003	0.033	0.005	0.007	0.089
	自构经验	0.002	0.002	0.024	0.002	0.002	0.022	0.002	0.002	0.022
极值	Munk	−0.019	−0.005	−0.057	−0.008	−0.006	−0.085	−0.019	−0.005	−0.057
	双线性	0.046	0.063	0.493	0.005	−0.009	0.084	0.021	0.033	0.287
	自构经验	0.005	−0.004	−0.071	0.005	0.008	0.086	0.005	0.004	−0.053

别为−0.003 m、0.033 m和0.084 m;*C*1、*C*3约束与*C*2约束定位精度差异明显,可能是因为此时反演的SSP结构引起的误差难以被模型参数有效补偿。实验结果表明,*M*2定位模型能够有效补偿反演SSP引入的误差。考虑当前海底大地测量定位精度水平(通常认为海底基准的水平定位精度达到0.02~0.03 m,高程定位精度达到0.06~0.09 m[11,24]),双线性模型仅在*C*2约束下能够实现高精度定位,Munk模型与自构经验模型在3种约束下均可实现高精度定位。

4 结 语

考虑现有海底大地测量定位精度水平,先通过附加适当约束反演SSP,再通过定位模型补偿声速时空变化的影响,可实现高精度海底大地测量定位。主要结论如下:

1)反演SSP能够表征SSP趋势,深层表征更为准确,浅层表征相对较差。浅海时,*C*2约束条件下的自构经验模型的反演精度相对最高。深海时,自构经验模型相比其余模型较优或相当,且在3种约束条件下反演精度大致相当。整体来看,*C*2约束条件下的自构经验模型反演精度最高。

2)定位仅考虑声速垂向变化时,Munk模型与双线性模型在*C*2约束条件下定位精度最高,自构经验模型在*C*1约束条件下定位精度最高。不同约束条件下的自构经验模型相较其余SSP模型的定位精度最高或相当。但不同约束条件下的3种SSP模型均不能实现高精度定位。

3)进一步考虑声速时空变化时,三维定位精度显著提高。在本文实验条件下,双线性模型仅在*C*2约束条件下能够实现高精度定位,Munk模型与自构经验模型在3种约束条件下均能实现高精度定位。综合反演SSP精度及定位误差统计信息,建议采用*C*2约束条件下的自构经验模型及两级优化方法实现替代现场SSP测量的海底大地测量定位。

本文方法的局限性主要体现在先验信息获取。浅海环境、北极环境和突发异常环境下难以获取准确的先验信息,会降低SSP反演精度。借助全球格网海洋环境数据集、海面卫星遥感数据集、现场测量海表声速等获取先验约束信息有待

进一步研究。此外,本文方法需要通过历史先验SSP提供较准确的参数初值,以使迭代有效收敛。

参 考 文 献

[1] IINUMA T, KIDO M, OHTA Y, et al. GNSS-Acoustic Observations of Seafloor Crustal Deformation Using a Wave Glider[J]. *Frontiers in Earth Science*, 2021, 9: 600946.

[2] BÜRGMANN R, CHADWELL D. Seafloor Geodesy[J]. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 2014, 42: 509-534.

[3] 陈惟杰, 朱锋, 郭斐, 等. 不同水深层的GNSS信号特征分析及其导航场景聚类划分[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2024, 49(1): 139-145.
CHEN Weijie, ZHU Feng, GUO Fei, et al. GNSS Signal Characteristics Analysis in Different Water Layers and Navigation Context Clustering[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2024, 49(1): 139-145.

[4] 郭军, 陈宏文, 李邵波, 等. 探测海底内部地质构造的浅地层剖面系统[J]. 测绘地理信息, 2021, 46(6): 179.
GUO Jun, CHEN Hongwen, LI Shaobo, et al. Sub-bottom Profiling System for Seafloor Internal Structure Detection[J]. *Journal of Geomatics*, 2021, 46(6): 179.

[5] SHAN R, LIU H M, ZHAO S, et al. Investigation on Vertical Position and Sound Velocity Variation for GNSS/Acoustic Seafloor Geodetic Calibration Based on Moving Survey Data[J]. *Remote Sensing*, 2022, 14(15): 3739.

[6] 王薪普, 薛树强, 曲国庆, 等. 水下定位声线扰动分析与分段指数权函数设计[J]. 测绘学报, 2021, 50(7): 982-989.
WANG Xinpu, XUE Shuqiang, QU Guoqing, et al. Disturbance Analysis of Underwater Positioning Acoustic Ray and Design of Piecewise Exponential Weight Function[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2021, 50(7): 982-989.

[7] KIDO M. Detecting Horizontal Gradient of Sound Speed in Ocean[J]. *Earth, Planets and Space*, 2007, 59(8): e33-e36.

[8] KIDO M, OSADA Y, FUJIMOTO H. Temporal Variation of Sound Speed in Ocean: A Comparison Between GPS/Acoustic and in Situ Measurements[J]. *Earth, Planets and Space*, 2008, 60(3): 229-234.

[9] YANG W L, XUE S Q, LIU Y X. *P*-Order Secant Method for Rapidly Solving the Ray Inverse Problem of Underwater Acoustic Positioning[J]. *Marine Geodesy*, 2023, 46(1): 3-15.

[10] 刘经南, 赵建虎, 马金叶. 通导遥一体化深远海PNT基准及服务网络构想[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2022, 47(10): 1523-1534.
LIU Jingnan, ZHAO Jianhu, MA Jinye. Concept of Constructing the Underwater PNT Network with the Abilities of Communication, Navigation and Remote Sensing in the Deep Sea[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(10): 1523-1534.

[11] WATANABE S I, ISHIKAWA T, YOKOTA Y, et al. GARPOS: Analysis Software for the GNSS-A Seafloor Positioning with Simultaneous Estimation of Sound Speed Structure[J]. *Frontiers in Earth Science*, 2020, 8: 597532.

[12] 陈冠旭, 刘杨, 李梦昊, 等. GNSS-声学海底定位的声速误差处理方法综述[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2022, 47(9): 1349-1363.
CHEN Guanxu, LIU Yang, LI Menghao, et al. Review on the Processing Methods of Sound Speed Errors in GNSS-Acoustic Seafloor Positioning[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(9): 1349-1363.

[13] ISHIKAWA T, YOKOTA Y, WATANABE S I, et al. History of on-Board Equipment Improvement for GNSS-A Observation with Focus on Observation Frequency[J]. *Frontiers in Earth Science*, 2020, 8: 150.

[14] YOKOTA Y, KANEDA M, HASHIMOTO T, et al. Experimental Verification of Seafloor Crustal Deformation Observations by UAV-Based GNSS-A[J]. *Scientific Reports*, 2023, 13: 4105.

[15] SAKIC P, CHUPIN C, BALLU V, et al. Geodetic Seafloor Positioning Using an Unmanned Surface Vehicle: Contribution of Direction-of-Arrival Observations[J]. *Frontiers in Earth Science*, 2021, 9: 636156.

[16] 孙文舟, 朱忆, 曾安敏, 等. 深水目标定位声速剖面自适应分层方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2025, 50(12): 2401-2407.
SUN Wenzhou, ZHU Yi, ZENG Anmin, et al. A Self-Adaptive Layering Method of Sound Velocity Profile for Deep-Water Object Positioning[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2025, 50(12): 2401-2407.

[17] CHEN H H. Travel-Time Approximation of Acoustic Ranging in GPS/Acoustic Seafloor Geodesy[J]. *Ocean Engineering*, 2014, 84: 133-144.

[18] 陈冠旭, 高柯夫, 赵建虎, 等. GNSS-声学位置服务中声速误差修正方法[J]. 测绘学报, 2023, 52(4): 536-549.

CHEN Guanxu, GAO Kefu, ZHAO Jianhu, et al. The Method of Sound Speed Errors Correction in GNSS-Acoustic Location Service[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2023, 52(4): 536-549.

[19] MUNK W H. Sound Channel in an Exponentially Stratified Ocean, with Application to SOFAR[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1974, 55(2): 220-226.

[20] XUE S Q, LI B J, XIAO Z, et al. Centimeter-Level-Precision Seafloor Geodetic Positioning Model with Self-Structured Empirical Sound Speed Profile[J]. *Satellite Navigation*, 2023, 4(1): 30.

[21] LEROY C C, PARTHIOT F. Depth-Pressure Relationships in the Oceans and Seas[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1998, 103(3): 1346-1352.

[22] 冯士筰. 海洋科学导论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
FENG Shizuo. An Introduction to Marine Science [M]. Beijing: Higher Education Press, 1999.

[23] DEL GROSSO V A. New Equation for the Speed of Sound in Natural Waters (with Comparisons to Other Equations)[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1974, 56(4): 1084-1091.

[24] 薛树强, 杨元喜, 肖圳, 等. 全球导航卫星系统-声呐组合观测模型分类体系[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2023, 44(11): 1857-1868.
XUE Shuqiang, YANG Yuanxi, XIAO Zhen, et al. Global Navigation Satellite System-Acoustic Combined Observation Model Classification System [J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2023, 44(11): 1857-1868.